QCM

1. Un = $\frac{n^2+2}{n}$; $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \geq n$
2. Un = $\frac{n+\cos(n)}{n+1}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$
3. Un = n.sin($\frac{1}{n}$) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

VRAI-FAUX

1. FAUX contre exemple : Un =$(-1)^n$
2. a) Vrai (th du cours)

   b)FAUX contre exemple : Un = -n et Vn =n+$\frac{1}{n}$

   Un+Vn converge vers 0 mais Un et Vn ne sont pas convergentes

3. FAUX contre exemple : Un =$(-1)^n$ $\rightarrow$ $(Un)^2=1$

   $(Un)^2$ converge vers 1 mais Un ne converge pas

4. FAUX voir définition

5. FAUX contre exemple : Un =$(-1)^n$

   U2n converge vers 1 ; U2n+1 converge vers -1 mais Un n'est pas

   Convergente

EXERCICE№1

1) $U_n = \frac{3n-1}{n+2} = \frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-1}{3n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{1}{3}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2-n+2} = 0$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^3 - 2n^2 + 1) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = +\infty$

5) $U_n = \frac{3n-1}{|-n+2|}$

Pour n > 2 $U_n = \frac{3n-1}{n-2} = \frac{3-\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$

6) $U_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{n+1}} = \sqrt{\frac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

8) $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

EXERCICE№2

$a_n = \frac{n[1+(-1)^n]}{n^2+1}$

1) $a_{2n} = \frac{2n[1+(-1)^{2n}}{4n^2+1} = \frac{4n}{4n^2+1}$; $a_{2n+1} = 0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n}{4n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{4n+\frac{1}{n}} = 0$ d'où

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et par suite a_n est convergente.

EXERCICE№3

$a_n = \frac{n[1+(-1)^n]}{n+1}$

1) $a_{2n} = \frac{2n[1+(-1)^{2n}]}{2n+1} = \frac{4n}{2n+1}$; $a_{2n+1} = 0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = 2 \neq \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1}$ d'où (a_n) est divergente

EXERCICE№4

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 2$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ $(-1 < \frac{1}{3} < 1)$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3+2^n} = 0$

3) $U_n = \frac{2^n}{1+2^n} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$; $(-1 < \frac{1}{2} < 1) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

EXERCICE№5

$U_n = \frac{2^n}{(-5)^{n+1}} = \frac{-1}{5}.\left(\frac{-2}{5}\right)^n$; $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$, car $(-1 < \frac{-2}{5} < 1)$

EXERCICE№6

1) $U_n = n + \sin n$

$\sin n \geq -1 \Rightarrow n + \sin n \geq n - 1 \Rightarrow U_n \geq n - 1$ et $\lim_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2) $U_n = \frac{1}{n}[\sin n + \left(\frac{1}{2}\right)^n]$; $(-1 \leq \sin n \leq 1)$

$\Rightarrow -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \sin n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\left[-1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \leq U_n \leq \frac{1}{n}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[-1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

3) $U_n = -1 + \frac{1}{n^2}(\cos n + n)$; $(-1 \leq \cos n \leq 1)$

$\Rightarrow n - 1 \leq \cos n + n \leq n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}(\cos n + n) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - 1 \leq U_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - 1$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - 1\right) = -1$ d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = -1$

EXERCICE№7

1) $U_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \ldots\ldots \times \frac{n-1}{n}$ en simplifiant on aura :

$U_n = \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

2) $V_n = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \ldots\ldots \times \frac{n+1}{n}$ en simplifiant on aura :

$V_n = \frac{n+1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

EXERCICE№8

$U_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n$; $n \geq 1$

1) $n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{n} \leq \frac{1}{2}$ d'où $\left(\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2) $0 \leq U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour $n \geq 4$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

EXERCICE№9

$W_n = \frac{n!}{3^n}$; n∈ IN

1) $\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3}$

$n \geq 3 \Longrightarrow n+1 \geq 4 \Longrightarrow \frac{n+1}{3} \geq \frac{4}{3}$, d'où $\frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{4}{3}$

2) démonstration par récurrence

*** vérifions pour n = 3**

$W_3 \geq \left(\frac{4}{3}\right)^0 W_3$ (donc la proprieté est vraie à l'ordre initial)

*** Soit n ≥ 3**

Supposant que : $W_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$ et montrons que : $W_{n+1} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} W_3$

D'après 1) : $W_{n+1} \geq \frac{4}{3} W_n \Longrightarrow W_{n+1} \geq \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$

$\Longrightarrow W_{n+1} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} W_3$

***conclusion :** $W_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$ pour n ≥ 3

3) $W_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$ pour n ≥ 3

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3 = +\infty$ car : $W_3 > 0$ et $\frac{4}{3} \geq 1$ d'où : $\lim_{n \to +\infty} W_n = +\infty$

EXERCICE№10

$U_n = \frac{n}{3^n}$; n ≥ 1

1) – a) $A_0(0,0)$; $A_1(1,\frac{1}{3})$; $A_2(2,\frac{2}{3^2})$; . . . . .

b) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n}$ pour : n ≥ 1 , $\frac{U_{n+1}}{U_n} - \frac{2}{3} = \frac{1-n}{3n} \leq 0$

d'où : , $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3}$ pour : n ≥ 1

c) pour : n = 0 ; $U_0 = 0$; $U_0 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$, (vraie)

Supposant que : $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que : $U_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

D'après b) : $U_{n+1} \leq \frac{2}{3} U_n$ *or* $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ d'où $U_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

***conclusion :** $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour n ∈ IN

d) $0 \leq U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ d'où : $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

2) pour k ≥ 1 on a : $U_k \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right)$: somme de n termes d'une suites géométrique

De raison $\left(\frac{2}{3}\right)$

D'où : $\sum_{k=1}^{n} U_k \leq 2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} U_k \leq 2 \Rightarrow S_n \leq 2$ car $U_0 = 0$

b) $S_{n+1} - S_n = = \frac{n+1}{3^{n+1}} \geq 0$

(S_n) est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.

EXERCICE№11

$a > 0$, $b_n = \frac{n}{(1+a)^n}$

1) $(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \Rightarrow (1+a)^n \geq C_n^2 a^2 \Rightarrow (1+a)^n \geq \frac{n(n-1)a^2}{2}$

2) pour n ≥ 2

$\frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{2}{n(n-1)a^2} \Rightarrow \frac{n}{(1+a)^n} \leq \frac{2}{(n-1)a^2} \Rightarrow 0 \leq b_n \leq \frac{2}{(n-1)a^2}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{(n-1)a^2} = 0$ d'où : $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$

3) $0 < q < 1$

a) $\frac{1}{q} > 1$ d'où il existe un réel $a > 0$ tel que $\frac{1}{q} = 1 + a$

par suite $q = \frac{1}{1+a}$

b) $x_n = x_0.q^n$; $|x_n| = \frac{|x_0|}{(1+a)^n} \Rightarrow n|x_n| = |x_0|\, b_n$

$\lim_{n \to +\infty} n|x_n| = 0$ d'après 2)

Par suite $\lim_{n \to +\infty} nx_n = 0$

4) – a) la suite $x_n = \frac{1}{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \in]0,1[$

D'où $\lim_{n \to +\infty} nx_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0$

b) la suite $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{3} \in]0,1[$

D'où $\lim_{n \to +\infty} nx_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} = 0$

c) $U_n = n.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

soit $x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{\sqrt{2}} \in]0,1[$

D'où $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ *et* $\lim_{n \to +\infty} nx_n = 0$, par suite $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

EXERCICE№12

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n} \end{cases} , n \in \mathbb{N}^*$$

1) démonstartion par reccurence:

* pour n=1 , $U_1 = 1 \leq 3$ (vrai)

* supposons que : $U_n \leq 3$ et montrons que : $U_{n+1} \leq 3$

$U_n \leq 3 \Rightarrow 3.U_n \leq 9 \Rightarrow \sqrt{3.U_n} \leq 3 \Rightarrow U_{n+1} \leq 3$

conclusion : $U_n \leq 3 \ ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) $U_{n+1} - U_n = \sqrt{3.U_n} - U_n = \dfrac{3U_n - U_n^{\,2}}{\sqrt{3.U_n} + U_n} = \dfrac{U_n(3 - U_n)}{\sqrt{3.U_n} + U_n}$

on a : $U_n > 0$ et $3 - U_n \geq 0$ d'où $U_{n+1} - U_n \geq 0 \quad \Rightarrow U_n \leq U_{n+1}$

par suite : (U_n) est croissante

3) (U_n) est croissante et majorée par 3 elle est donc convergente

* soit ℓ sa limite

(U_n) est croissante $\Rightarrow U_n \geq U_1 \Rightarrow U_n \geq 1$ Donc $1 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \ell \leq 3$

* $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \sqrt{3x}$ f est continue sur $[1,3]$ d'où $\ell = f(\ell)$

$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \sqrt{3\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 3\ell \Leftrightarrow \ell(\ell - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 3$, $0 \notin [1,3]$ d'où $\ell = 3$

conclusion : $\lim U_n = 3$

EXERCICE№13

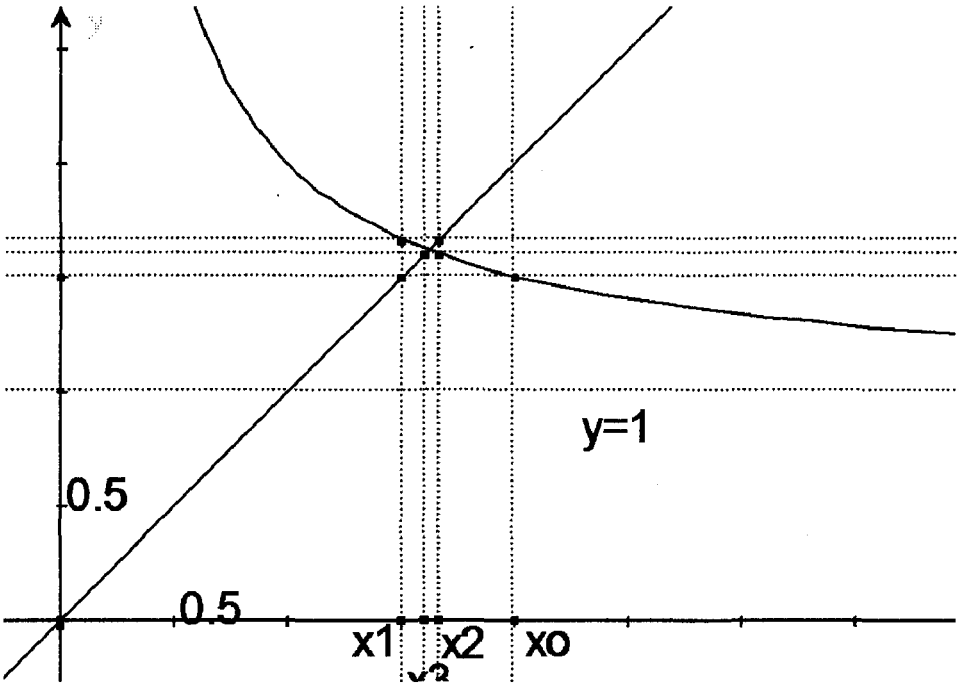
1) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0$

f est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ d'où

$$f(]0,+\infty[) = \left]\lim_{+\infty} f, \lim_{0^+} f\right[=]1,+\infty[$$

x	0	$+\infty$
f'(x)	-	
f(x)	$+\infty$ ↘	1

2)



3) $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$f(\varphi) = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1} = 1 + \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

4) $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$

a) $x_1 = f(x_0) = f(2) = \frac{3}{2}$

$x_2 = f(x_1) = f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{3}$

$x_3 = \frac{8}{5}$; $x_4 = \frac{13}{8}$

b) par reccurence

* $U_0 = 2 \in \mathbb{Q}_+$ (vrai)

* supposons que $x_n \in \mathbb{Q}_+$ et montrons que $x_{n+1} \in \mathbb{Q}_+$

$x_{n+1} = f(x_n) = 1 + \frac{1}{x_n} \in \mathbb{Q}_+$

c) * montrons que : $x_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$; $\forall n \in \mathbb{N}$

* pour n=0 : $x_0 = 2 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

* supposons que : $x_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ et montrons que : $x_{n+1} \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

$x_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \Rightarrow \frac{3}{2} \le x_n \le 2 \Rightarrow f(2) \le f(x_n) \le f(\frac{3}{2})$ (car f est décroissante)

$\Rightarrow \frac{3}{2} \le x_{n+1} \le \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} \le x_{n+1} \le 2$

conclusion: $x_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$; $\forall n \in \mathbb{N}$

* $|x_{n+1} - \varphi| = |f(x_n) - f(\varphi)| = \left|1 + \frac{1}{x_n} - 1 - \frac{1}{\varphi}\right| = \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{\varphi}\right| = \frac{|x_n - \varphi|}{\varphi . x_n}$

comparons $\frac{1}{\varphi . x_n}$ et $\frac{4}{9}$

$$x_n \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{x_n} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{\varphi.x_n} \leq \frac{2}{3} \times \frac{1}{\varphi} \Rightarrow \frac{1}{\varphi.x_n} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\varphi.x_n} \leq \frac{3(\sqrt{5}-1)}{9} \Rightarrow \frac{1}{\varphi.x_n} \leq \frac{4}{9}$$

d'où $|x_{n+1} - \varphi| \leq \frac{4}{9}|x_n - \varphi|$

d) $|x_1 - \varphi| \leq \frac{4}{9}|x_n - \varphi|$

$|x_2 - \varphi| \leq \frac{4}{9}|x_1 - \varphi|$

$|x_3 - \varphi| \leq \frac{4}{9}|x_2 - \varphi|$

.

.

$|x_n - \varphi| \leq \frac{4}{9}|x_{n-1} - \varphi|$

multiplions membre à membre et simplifions on a :

$$|x_n - \varphi| \leq (\frac{4}{9})^n |2 - \varphi|$$

$$\lim_{n\to+\infty} (\frac{4}{9})^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (x_n - \varphi) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = \varphi$$

EXERCICE№14

$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$; $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) $U_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = 1$; $U_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$; $U_3 = U_2 + \frac{1}{3^2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$

b) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ d'où (U_n) est croissante

2) a) $k \geq 2$

$$(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2(k-1)} \geq 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) $n \geq 2$ $k \geq 2$, on a : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \le \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow U_n - 1 \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow U_n - 1 \le 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \Rightarrow U_n - 1 \le 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow U_n \le 2 - \frac{1}{n}$$

c) (U_n) est croissante et majorée par 2

elle est donc convergente soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

(U_n) est croissante $\Rightarrow U_n \ge U_3$, pour $n \ge 3$

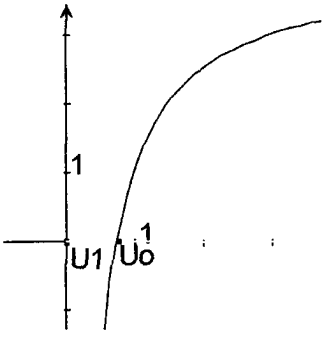
$$\Rightarrow \frac{49}{36} \le U_n \le 2 - \frac{1}{n} \quad or \quad \lim_{n\to+\infty}(2 - \frac{1}{n}) = 2 \quad \text{d'où} \quad \frac{49}{36} \le \ell \le 2$$

EXERCICE№15

$x \in]0,+\infty[$

1) $f(x) = 4 - \frac{3}{x}$ $\qquad f'(x) = \frac{3}{x^2} > 0$

x	0	+∞
f'(x)	+	
f(x)	-∞ ↗	4



2) $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{4} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

a) $U_1 = f(U_0) = f(\frac{3}{4}) = 0$

b) $U_2 = f(U_1) = f(0)$ n'existe pas d'où (U_n) n'est pas définie

3) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) $U_1=f(U_0)=3$; $U_2=3$; $U_3=3$

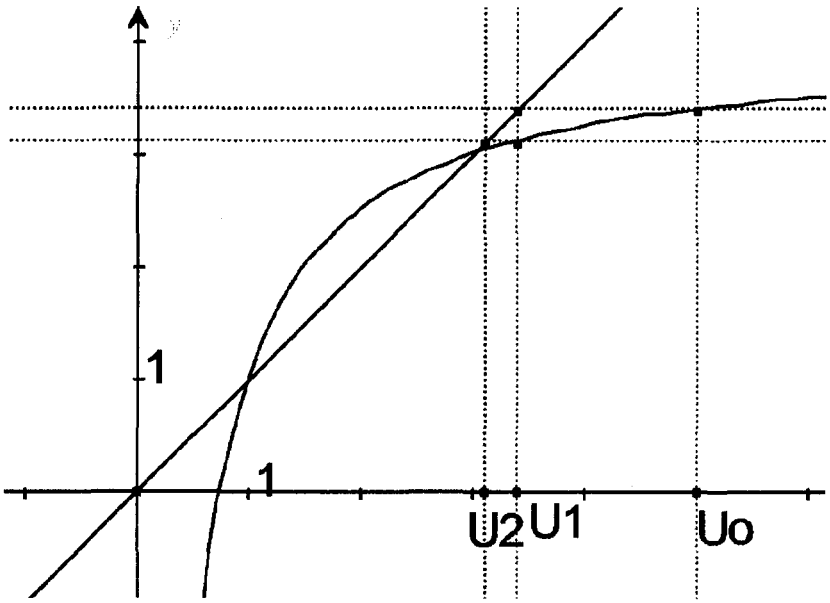
b) •pour n=0 on a $U_0=3$

• supposons que $U_n=3$ et montrons que : $U_{n+1}=3$

$U_{n+1}=f(U_n)=f(3)=3$ d'où : $U_n=3$; $\forall n \in \mathbb{N}$

4) $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) $U_1=f(5)=17/5$ $U_2=f(\frac{17}{5})=\frac{53}{17}$



b) montrons que : $U_n \geq 3$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

• $U_1 = \frac{17}{5} > 3$ (vrai)

• supposons que : $U_n \geq 3$ et montrons que $U_{n+1} \geq 3$

$U_n \geq 3 \Rightarrow f(U_n) \geq f(3)$ (car f est croissante) $\Rightarrow$ $U_{n+1} \geq 3$

conclusion : $U_n \geq 3$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$$* \; U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n - 3}{U_n} - U_n = \frac{-U_n^2 + 4U_n - 3}{U_n} = \frac{-(U_n - 1).(U_n - 3)}{U_n}$$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0$ car $U_n \geq 3$ d'où (U_n) est décroissante.

c) (U_n) est décroissante et minorée par 3 donc elle est convergente

soit $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ on a : $U_n \geq 3 \Rightarrow \alpha \geq 3$

f est continue sur $[3, +\infty[$ d'où $\alpha = f(\alpha)$

$\alpha = f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 = 4\alpha - 3 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ou $\alpha = 3$ *or* $\alpha \geq 3 \Rightarrow \alpha = 3$

d) $U_n - 3 \leq 10^{-5}$ calculatrice $n_0 = 11$ $(n \geq 11)$

EXERCICE№16

$$\begin{cases} U_1 = 5 \\ U_{n+1} = 5 - \frac{6}{U_n} \; , \; n \geq 1 \end{cases}$$

1) $U_2 = \frac{19}{5}$; $U_3 = \frac{65}{19}$

2) démonstration par récurrence :

*** vérifions pour n = 0**

$U_{0+1} = U_1 = 5$

$\frac{3^{0+2} - 2^{0+2}}{3^{0+1} - 2^{0+1}} = \frac{9-4}{3-2} = 5$; $U_{0+1} = \frac{3^{0+2} - 2^{0+2}}{3^{0+1} - 2^{0+1}}$ (vraie)

***supposons que :** $U_{n+1} = \frac{3^{n+2} - 2^{n+2}}{3^{n+1} - 2^{n+1}}$ et montrons que :

$U_{n+2} = \frac{3^{n+3} - 2^{n+3}}{3^{n+2} - 2^{n+2}}$, on a : $U_{n+2} = 5 - \frac{6}{U_{n+1}} = 5 - \frac{6(3^{n+1} - 2^{n+1})}{3^{n+2} - 2^{n+2}}$

$$= \frac{5(3^{n+2} - 2^{n+2}) - 6(3^{n+1} - 2^{n+1})}{3^{n+2} - 2^{n+2}} = \frac{5 \times 3^{n+2} - 5 \times 2^{n+2} - 2 \times 3^{n+2} - 3 \times 2^{n+2}}{3^{n+1} - 2^{n+1}}$$

$$= \frac{3 \times 3^{n+2} - 2 \times 2^{n+2}}{3^{n+2} - 2^{n+2}} = \frac{3^{n+3} - 2^{n+3}}{3^{n+2} - 2^{n+2}}$$

*** conclusion :** $U_{n+1} = \frac{3^{n+2} - 2^{n+2}}{3^{n+1} - 2^{n+1}}$ pour tout $n \in IN$

3) pour $n \geq 1$; $U_n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n-2^n} = \frac{3-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

EXERCICE№17

1) $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + a_n \ , \ n \geq 0 \end{cases}$

* pour n = 0 on a : $a_0 \geq 0$ (vraie)

***supposons que :** $a_n \geq n$; montrons que : $a_{n+1} \geq n + 1$

$a_n \geq n \Rightarrow a_n^2 \geq n^2$ d'où : $a_n^2 + a_n \geq n^2 + n$

$\Rightarrow a_{n+1} \geq n(n+1)$ d'où : $a_{n+1} \geq n + 1$

* **conclusion :** $a_n \geq n$ pour tout $n \in IN$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

2) – a) *) pour n = 0 , on a : $-1 \leq b_0 \leq 0$

* supposons que : $-1 \leq b_n \leq 0$, montrons que : $-1 \leq b_{n+1} \leq 0$

$-1 \leq b_n \leq 0 \Rightarrow 0 \leq b_n + 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \geq b_n (b_n + 1) \geq b_n$

$\Rightarrow -1 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq 0$ d'où : $-1 \leq b_{n+1} \leq 0$

* **conclusion :** $-1 \leq b_n \leq 0 \ \forall n \in IN$

b) $b_{n+1} - b_n = b_n^2 \geq 0 \Rightarrow b_{n+1} \geq b_n$ d'où : (b_n) est croissante.

c) (b_n) est croissante et majorée par 0 , elle est donc convergente.

Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$

$-1 \leq b_n \leq 0 \Rightarrow \ell \in [0,1]$

On a : $b_{n+1} = f(b_n)$ avec $f(x) = x^2 + x$

F est continue sur [0,1] d'où $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell^2 + \ell = \ell \Leftrightarrow \ell^2 = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$

EXERCICE№18

$\begin{cases} U_0 = 0,1 \\ U_{n+1} = 1,6U_n.(1-U_n) \end{cases}$

1) $f(x)=1,6.x.(1-x) \Rightarrow f'(x) = 1,6.[1-2x]$

x	-∞	½	+∞
f'(x)	+	0	-
f(x)	-∞ ↗	0,4	↘ -∞

2) * pour n=0, on a : $0,1 \le U_0 = 0,1 < \frac{3}{8}$

* supposons que : $0,1 \le U_n \le \frac{3}{8}$ *et montrons* que : $0,1 \le U_{n+1} \le \frac{3}{8}$

$0,1 \le U_n \le \frac{3}{8} \Rightarrow f(0,1) \le f(U_n) \le f(\frac{3}{8})$ (car f est croissante sur $\left[(0,1);\frac{3}{8}\right]$

$\Rightarrow 0,144 \le U_{n+1} \le \frac{3}{8} \quad \Rightarrow 0,1 \le U_{n+1} \le \frac{3}{8}$

conclusion : $0,1 \le U_n \le \frac{3}{8}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

3) $U_{n+1}-U_n = U_n[1,6-1,6U_n-1] = U_n.[0,6-1,6U_n] = \frac{U_n}{10}[6-16U_n] = \frac{8}{5}U_n.\left[\frac{3}{8}-U_n\right]$

$\Rightarrow U_{n+1}-U_n \ge 0$ car $0,1 \le U_n \le \frac{3}{8}$ d'où (U_n) est croissante

(U_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{8}$ elle est donc convergente

4) a) $1,6.(\frac{5}{8}-U_n)(\frac{3}{8}-U_n) = 1,6.\left[\frac{15}{64}-U_n+U_n^2\right] = \frac{16}{10}\times\frac{15}{64}-(1,6)(U_n-U_n^2)$

$= \frac{3}{8}-(1,6)U_n(1-U_n) = \frac{3}{8}-U_{n+1}$

b) $V_n = \frac{3}{8}-U_n$

* $V_n \ge 0$ car $U_n \le 3/8$

* d'après 4) a) : $V_{n+1} = 1,6(\frac{5}{8}-U_n).V_n \Rightarrow \quad \frac{V_{n+1}}{V_n} = (1,6)(\frac{5}{8}-U_n)$

$U_n \ge 0,1 \Rightarrow -U_n \le \frac{-1}{10} \Rightarrow \frac{5}{8}-U_n \le \frac{21}{40} \Rightarrow (1,6)(\frac{5}{8}-U_n) \le \frac{16}{10}\times\frac{21}{40} \Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} \le \frac{4\times21}{100}$

$\Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} \le 0,84$

c) * $V_0 = \frac{3}{8}-U_0 = \frac{3}{8}-\frac{1}{10} = \frac{11}{40} \quad \Rightarrow 0 \le V_0 \le (0,84)^0 = 1$ (vrai)

* supposons que : $0 \le V_n \le (0,84)^n$ *et* montrons que : $0 \le V_{n+1} \le (0,84)^{n+1}$

• $V_{n+1} \ge 0$ d'aprés 4) b)

• $\frac{V_{n+1}}{V_n} \le 0,84 \Rightarrow V_{n+1} \le (0,84).V_n \Rightarrow V_{n+1} \le (0,84).(0,84)^n$

d'où $0 \le V_{n+1} \le (0,84)^{n+1}$

conclusion : $0 \le V_n \le (0,84)^n$

d) $0 \le V_n \le (0,84)^n$ *or* $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,84)^n = 0$ car $0,84 \in]-1,1[$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

$U_n = \frac{3}{8} - V_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{3}{8}$

c) on a : $0 \le \frac{3}{8} - U_n \le (0,84)^n \ ; \forall n \in \mathbb{N}$

$(0,84)^n \le 10^{-5} \Rightarrow$ (*calculatrice*) $n_0 \ge 67$

EXERCICE№19

1) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-5}{x^2}\right) = \frac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{2x^2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt{5}$	↘	‖	$+\infty$	↘	↗	$+\infty$
					‖		$\sqrt{5}$		

2) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \ , \ n \ge 0 \end{cases}$

Montrons par récurrence que : $U_n > \sqrt{5}$; pour $n \ge 0$

* $U_0 = 3 > \sqrt{5}$ (vraie)

* supposons que : $U_n > \sqrt{5}$ et montrons que : $U_{n+1} > \sqrt{5}$

$U_n > \sqrt{5} \Rightarrow f(U_n) > f(\sqrt{5})$ car f est strictement croissante sur $[\sqrt{5}, +\infty[$

D'où : $U_{n+1} > \sqrt{5}$

Conclusion : $U_n > \sqrt{5}$; $\forall n \in IN \Rightarrow U_{n+1} > \sqrt{5}$ **(1)**

* $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{5}{U_n}\right) - U_n = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{U_n} - U_n\right)$

$= \frac{5-U_n^2}{2U_n} = \frac{(\sqrt{5}-U_n)(\sqrt{5}+U_n)}{2U_n}$

$U_n > \sqrt{5}$ d'où : $U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow (U_n)$ est strictement décroissante

Par suite : $U_{n+1} < U_n \leq U_0 \Rightarrow U_{n+1} < U_n \leq 3$ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow \sqrt{5} < U_{n+1} < U_n \leq 3$

b) (U_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{5}$, elle est donc convergente.

Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

$\sqrt{5} < U_n \leq 3 \Rightarrow \ell \in [\sqrt{5},3]$

$U_{n+1} = f(U_n)$; f est continue sur $[\sqrt{5},3]$ d'où : $\ell = f(\ell)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{5}{\ell}\right) = \ell \Leftrightarrow \ell + \frac{5}{\ell} = 2\ell \Leftrightarrow \ell = \frac{5}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 5 \Leftrightarrow \ell = \sqrt{5}$

Comme $\ell \geq \sqrt{5}$; conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{5}$

EXERCICE№20

1) $\begin{cases} U_n = \frac{2}{n} \\ \mathcal{V}_n = -\frac{3}{n} \end{cases}$ $n \geq 2$

$n \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$ d'où : $\frac{2}{n} \geq \frac{2}{n+1}$ et $-\frac{3}{n} \leq -\frac{3}{n+1}$

$\Rightarrow U_n \geq U_{n+1}$ et $\mathcal{V}_n \leq \mathcal{V}_{n+1}$

(U_n)est décroissante et $(\mathcal{V}_n)$ est croissante

Et on a : $\mathcal{V}_n \leq U_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - \mathcal{V}_n = 0$

conclusion : (U_n) et $(\mathcal{V}_n)$ sont adjacentes.

2)) $\begin{cases} U_n = \frac{n+2}{n-1} \\ \mathcal{V}_n = \frac{2n+3}{2n+5} \end{cases}$ $(n \geq 4)$

$U_n - \mathcal{V}_n = \frac{8n+13}{(2n+5)(n-1)} \geq 0$ d'où : $\mathcal{V}_n \leq U_n$

(U_n)est décroissante et $(\mathcal{V}_n)$ est croissante

$\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - \mathcal{V}_n) = 0$

conclusion : (U_n) et $(\mathcal{V}_n)$ sont adjacentes.

3) $U_n \geq 0$ et $(\mathcal{V}_n) \leq 0$ d'où : $\mathcal{V}_n \leq U_n$

$U_{n+1} - U_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq 0$ d'où (U_n) est décroissante .

$\mathcal{V}_n = - U_n \Rightarrow (\mathcal{V}_n)$ est croissante

$\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - \mathcal{V}_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} 2U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

conclusion : (U_n) et $(\mathcal{V}_n)$ sont adjacentes.

EXERCICE№21

1) soit $W_n = U_n - \mathcal{V}_n$

$W_{n+1} = U_{n+1} - \mathcal{V}_{n+1} = \frac{U_n+2\mathcal{V}_n}{3} - \frac{U_n+3\mathcal{V}_n}{4} = \frac{U_n-\mathcal{V}_n}{12} = \frac{1}{12} W_n$

D'où (W_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $W_0 = 11$

2) $U_n - \mathcal{V}_n = W_n = W_0.q^n \Rightarrow U_n - \mathcal{V}_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \Rightarrow U_n - \mathcal{V}_n \geq 0$

Par suite : $U_n \geq \mathcal{V}_n$

3)* $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n+2\mathcal{V}_n}{3} - U_n = \frac{2(\mathcal{V}_n-U_n)}{3} = \frac{2}{3} W_n \leq 0$ d'où : (U_n) est décroissante

* $\mathcal{V}_{n+1} - \mathcal{V}_n = \frac{1}{4} W_n \geq 0$ d'où : $(\mathcal{V}_n)$ est croissante

* $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - \mathcal{V}_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} W_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$

* on sait que : $U_n \geq \mathcal{V}_n$;

conclusion : (U_n) et $(\mathcal{V}_n)$ sont adjacentes

par suite elles convergent vers une même limite α

4) $t_n = 3U_n + 8\mathcal{V}_n$

a) $t_{n+1} = 3U_{n+1} + 8\mathcal{V}_{n+1} = (U_n + 2\mathcal{V}_n) + 2(U_n + 3\mathcal{V}_n)$

$= 3U_{n+1} + 8\mathcal{V}_{n+1} = t_n$ d'où : (t_n) est constante.

b) $t_0 = 3U_0 + 8\mathcal{V}_0$

$t_0 = 44$ d'où : $t_n = 44$, $\forall n \in IN$

$\Rightarrow 3U_n + 8\mathcal{V}_n = 44 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (3U_n + 8\mathcal{V}_n) = 44 \Rightarrow 11\alpha = 44$

$\Rightarrow \alpha = \frac{44}{11} = 4$

EXERCICE№22

0<b<a

1) $\left.\begin{array}{l} a)\ (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+2ab) \\ (\sqrt{ab})^2 = a.b \end{array}\right\rangle \Rightarrow (\frac{a+b}{2})^2 - (\sqrt{ab})^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2-2ab)$

$$= \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

d'où $(\frac{a+b}{2})^2 \geq (\sqrt{ab})^2$ et par suite $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

b) $(a-b)^2 - (a^2-b^2) = a^2+b^2-2ab-a^2+b^2 = 2b^2-2ab$

$$= 2b.(b-a) \leq 0 \quad (\text{car } 0<b<a)$$

d'où $(a-b)^2 \leq a^2-b^2$

2) $\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$

a) * pour n=0 $b_0 = b \leq a_0 = a$

* supposons que : $b_n \leq a_n$ et montrons que : $b_{n+1} \leq a_{n+1}$

$b_{n+1} \leq a_{n+1}$ d'après 1) a) conclusion : $b_n \leq a_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

b)* $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} \leq 0$ d'où (a_n) est décroissante

* $b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}\left[\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right] \geq 0$ car $\sqrt{a_n} \geq \sqrt{b_n}$

d'où (b_n) est croissante

3) a) d'après 1) b) : $(a_{n+1}-b_{n+1})^2 \leq a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 \Rightarrow (a_{n+1}-b_{n+1})^2 \leq \frac{(a_n+b_n)^2}{4} - a_n b_n$

$$\Rightarrow (a_{n+1}-b_{n+1})^2 \leq \frac{a_n^2+b_n^2+2a_nb_n}{4} - a_nb_n$$

$$\Rightarrow (a_{n+1}-b_{n+1})^2 \leq \frac{a_n^2+b_n^2-2a_nb_n}{4}$$

$$\Rightarrow (a_{n+1}-b_{n+1})^2 \leq (\frac{a_n-b_n}{2})^2$$

b) * pour n=0 $a_0 - b_0 = a - b \le \frac{a-b}{2^0}$ (vrai)

* supposons que : $a_n - b_n \le \frac{a-b}{2^n}$ et montrons que : $a_{n+1} - b_{n+1} \le \frac{a-b}{2^{n+1}}$

on a : $a_{n+1} - b_{n+1} \le \frac{a_n - b_n}{2}$ or $a_n - b_n \le \frac{a-b}{2^n}$ d'où $a_{n+1} - b_{n+1} \le \frac{a-b}{2^{n+1}}$

conclusion : $a_n - b_n \le \frac{a-b}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

* $b_n \le a_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

4) * (b_n) est croissante et (a_n) décroissante

* $0 \le a_n - b_n \le (\frac{1}{2})^n.(a-b)$ *or* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^n.(a-b) = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = 0$

d'où (a_n) et (b_n) sont adjacentes par suite, elles convergent vers la meme limite α

5) (a_n) est décroissante $\Rightarrow a_n \le a_0 \Rightarrow a_n \le a$;$\forall n \in \mathbb{N}$

on a : $b_n \le a_n$ d'où $b_n \le a$

(b_n) est croissante et majorée par a et (b_n) converge vers α $\Rightarrow$ *alors* $b_n \le \alpha$;$\forall n \in \mathbb{N}$

de meme : $a_n \ge \alpha$; $\forall n \in \mathbb{N}$ d'où $b_n \le \alpha \le a_n$;$\forall n \in \mathbb{N}$

$a_n - b_n \le \frac{a-b}{2^n} \Rightarrow 0 \le a_n - \alpha \le \frac{a-b}{2^n}$

pour a=2 et b=1 $0 \le a_n - \alpha \le \frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{2^n} \le 10^{-10} \Leftrightarrow 2^n \ge 10^{10}$

on a : $2^{40} \ge 10^{10}$ ← (*calculatrice*) d'où $\alpha \simeq a_{40}$ (à calculer)